Διάλεξη 5η

29/10/2018

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ομογενής εξίσωση (α' τάξης):

$$y' = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$, f, g: ομογενείς ίδιου βαθμού ομογένειας

Ισχύει ότι
$$\left.\begin{aligned} f(\lambda x,\lambda y) &= \lambda^n f(x,y) \\ g(\lambda x,\lambda y) &= \lambda^n g(x,y) \end{aligned}\right\} (*)$$

αν θέσω $z = \frac{y}{x} \Leftrightarrow xz = y$

$$y' = z'x + z.$$

Η εξίσωση γράφεται
$$z'x + z = \frac{f(x,xz)}{g(x,xz)} \overset{(*)}{=} \frac{x^n f(1,z)}{x^n g(1,z)} \Rightarrow$$

$$z'x = \frac{f(1,z)}{g(1,z)} - z.$$

$$\int \frac{dz}{\frac{f(1,z)}{g(1,z)} - z} = \int \frac{dx}{x} + c$$

Παραδείγματα:

1.

$$y' = \frac{x^3+y^3}{xy^2}$$

Θέτω $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx$

$$y' = z'x + z$$

$$z'x + z = \frac{x^3\left(1 + \frac{y}{x}\right)}{x^3\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{1+z}{z^2}$$

2. $(x^2+y^2)dx + 2xy\,dy = 0, \quad y(1) = -1$

$\hookrightarrow (x^2+y^2)dx = -2xy\,dy \Rightarrow$

$$-\frac{(x^2+y^2)}{2xy} = \frac{dy}{dx}$$

$$y' = -\frac{x^2+y^2}{2xy}$$

Θέτω $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx$

$$y' = z'x + z.$$

άρα $\boxed{z'x + z = -\frac{1+z^2}{2z}}$

$$z'x = -\frac{1+z^2}{2z} - z = -\frac{1+z^2+2z^2}{2z} = -\frac{1+3z^2}{2z}.$$

$$\Rightarrow z'x = -\frac{1+3z^2}{2z}$$

Αν ολοκληρώσω κατά μέλη προκύπτει:

$$\int \frac{2z}{1+3z^2}\,dz = -\int \frac{1}{x}\,dx.$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{(1+3z^2)'}{1+3z^2}\,dx = -\ln|x| + C_1$$

$$\frac{1}{3}\ln|1+3z^2| = -\ln|x| + C_1$$

$$\ln(1+3z^2) = -3\ln|x| + 3C_1$$

$$\ln(1+3z^2) + \ln|x|^3 = 3C_1$$

$$\ln(1+3z^2)|x|^3 = 3C_1$$

$$(1+3z^2)|x|^3 = C$$

για $x>0$: $1+3z^2 = \frac{C}{x^3} \Rightarrow z = \pm\sqrt{\left(\frac{C}{x^3}-1\right)\frac{1}{3}}$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = -\sqrt{\left(\frac{C}{x^3}-1\right)\cdot\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -x\sqrt{\left(\frac{C}{x^3}-1\right)\frac{1}{3}}}$$ για $x>0$

Άσκηση

Όπου η εξίσωση $y' = \dfrac{\alpha x+\beta y+\gamma}{\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1}$, με $\alpha\beta_1-\beta\alpha_1 \neq 0$, $\alpha,\beta,\gamma,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$: σταθερά

μετατρέπεται σε μια ομογενή διαφορική εξίσωση με την αντιστοιχία: $x = X + x_0$, $y = Y + y_0$, όπου x_0, y_0 είναι τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha x_0+\beta y_0+\gamma=0 \\ \kappa' \ &\alpha_1 x_0+\beta_1 y_0+\gamma_1=0 \end{aligned}\right\} : (S)$$

Λύση

Πράγματι αν x_0, y_0 είναι λύσεις της (S) και $x = X+x_0$, $y = Y+y_0$ ώστε $dx = dX$, $dy = dY$

Τότε: $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\alpha x+\beta y+\gamma}{\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1}}$

και $$\frac{dY}{dX} = \frac{\alpha(X+x_0)+\beta(Y+y_0)+\gamma}{\alpha_1(X+x_0)+\beta(Y+y_0)+\gamma_1}$$

$$= \frac{\alpha X+\beta Y+\cancelto{0}{(\alpha\cdot x_0+\beta y_0+\gamma)}}{\alpha X+\beta Y+\cancelto{0}{(\alpha_1\cdot x_0+\beta_1 y_0+\gamma_1)}} \Rightarrow \boxed{\frac{dY}{dX} = \frac{\alpha X+\beta Y}{\alpha_1 X+\beta_1 Y}}$$

Εξίσωση Bernoulli: $y' + a(x)y = b(x)y^r$, $r \neq 0,1$
$y \neq 0$

^ $z = y^{1-r}$.

Άσκηση 6.6(σελ 37)

iii) $y' = xy = y^3 e^{x^2}$, $y(0) = \frac{1}{2}$.

⊛ $r=3$

Άρα $z = y^{1-r} = y^{1-3} = y^{-2} \Rightarrow z' = -2y^{-3}y'$

Η εξίσωση γράφεται $y'y^{-3} + x\underbrace{yy^{-3}}_{y^{-2}} = e^{x^2}$

$$\Rightarrow \frac{z'}{-2} + xz = e^{x^2}$$

$$\Rightarrow z' - 2xz = -2e^{x^2}$$

Όποτε: $z(x) = e^{-\int_0^x (-2s)ds}\left[4 + \int_0^x (-2)e^{s^2} e^{\int_0^s (-2u)du} ds\right]$

$$= e^{x^2 - 0^2}\left[4 + \int_0^x (-2)e^{s^2} e^{-s^2} ds\right] \Rightarrow$$

$$z(x) = e^{x^2}(4-2x).$$

Τώρα παίρνω ότι: $z = \frac{1}{y^2} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{z} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{z(x)}}$

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{x^2}(4-2x)}} = e^{-x^2/2}\frac{1}{\sqrt{4-2x}}, \quad x<2.$$

παράδειγμα 2.6(1 39)

$$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{2}y^{-1}, \quad y(-1) = 2.$$

$r = -1$, $z = y^{1-(-1)} = y^2$

→ ισχύει ότι $z' - \frac{2}{x}\cdot z = -1.$

$$z(-1) = y^2(-1) = 2^2 = 4$$

για $x<0$: $z(x) = e^{-\int_{-1}^{x}\left(-\frac{2}{s}\right)ds}\left[4 + \int_{-1}^{x}(-1)e^{\int_{-1}^{s}\left(-\frac{2}{u}\right)du}ds\right]$

$$= e^{\int_{-1}^{x}\frac{2}{s}ds}\left[4 - \int_{-1}^{x} e^{-2\ln|u|\big|_{u=-1}^{u=s}}ds\right]$$

$$= e^{2\ln|s|\big]_{-1}^{x}}\left[4 - \int_{-1}^{x}\frac{1}{s^2}ds\right] = x^2\left[4 - \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{-1}\right]\right]$$

~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o~o

→ (*) Η άσκηση αυτή είναι λυμένη στο φυλλάδιο ασκήσεων του

Άσκηση του Γιορμάζ: Να βρείτε τις συνεχείς λύσεις της εξίσωσης

$$y(x) + 1 = \int_0^x y(t)\left[t\,y(t) - 1\right]dt, \quad x \geq 0$$

Λύση

$y(x) + 1 = \int_0^x y(t)\left[t\,y(t) - 1\right]dt$, $x > 0$ → (*) η εξίσωση αυτή έχει μία λύση//

$\Rightarrow$ (. . .) . . . . . .

$\Rightarrow$ $y'(x) = y(x)\left[x\,y(x) - 1\right]$

$$\boxed{y'(x) + y(x) = x\,y^2(x)}$$ → (**) Η εξίσωση αυτή έχει άπειρες λύσεις

για $x = 0$: $y(0) + 1 = \int_0^0 \cdots$ $\Rightarrow y(0) + 1 = 0$

$\Rightarrow y(0) = -1$

Η (*) και η (**) δεν είναι ισοδύναμες //.

Παράδειγμα: (λογιστική εξίσωση)

$$y' = y(a-by), \quad a,b>0, \quad y(0)=c \geq 0.$$

$$\hookrightarrow y' = ay - by^2$$

$$\Rightarrow \boxed{y' - ay = -by^2} \rightsquigarrow \text{εξίσωση Bernoulli.}$$

Ν.Ο.Ο. :

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \begin{cases} a/b, & c>0 \\ 0, & c=0 \end{cases}$$

Λύση

$r=2$ άρα $z = y^{1-2} = \frac{1}{y}$ και $z' = -y'y^{-2}$

Έτσι: $y'y^{-2} - ay^{-1} = -b$

$$z' - az = -b$$

$$-z' + az = b$$

Οπότε: $z(x) = e^{-\int_0^x a\,ds}\left[z(0) + \int_0^x b e^{\int_0^s a\,du}\,ds\right]$

$$= e^{-ax}\left[\frac{1}{c} + b\int_0^x e^{as}\,ds\right]$$

$$= e^{-ax}\left[\frac{1}{c} + \frac{b}{a}\left[e^{ax}-1\right]\right]$$

$$\Rightarrow z(x) = \frac{1}{c}\cdot e^{-ax} + \frac{b}{a} - e^{-ax}$$

$$z(x) = \left(\frac{1}{c}-1\right)e^{-ax} + \frac{b}{a}$$

$$y(x) = \frac{1}{\frac{b}{a} + e^{-ax}\left(\frac{1}{c}-1\right)} \to \frac{a}{b}$$

<u>Β' τρόπος:</u>

$$y' = y(a-by), \quad a,b>0, \quad y(0) = c > 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{dy}{\underbrace{y(a-by)}_{\int \frac{\kappa}{y} + \int \frac{\lambda}{a-by}}} = \int dx$$